Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики і обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-47М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи та технології» спеціальності **126 «Інформаційні системи та технології»** денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 4 від 11.02.2021 р.

Рівне ─ 2021

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інформаційні системи та технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Кушнір О. О., Кушнір В. П. ─ Рівне : НУВГП, 2021 ─ 30 с.

Укладачі:
Кушнір О. О., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики;
Кушнір В. П. , канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., доктор пед. наук, проф., зав. кафедри вищої математики.

Керівник групи забезпечення спеціальності — Гладка О. М., к.т.н., доцент.

ID перевірки: 1006068820 від 28.01.2021

Зміст

Вступ 3
§ 1. Елементи комбінаторики 4
§ 2. Випадкові події та їх імовірності.................................. 8
§ 3. Випадкові величини 13
§ 4. Розподіли випадкових величин.................................... 16
§ 5. Системи випадкових величин 18
§ 6. Елементи математичної статистики 19
§ 7. Виявлення залежностей між досліджуваними ознаками та оцінка тісноти їх зв’язку 22
Додаток А. Використання функцій електронної таблиці .. 25
Додаток Б. Відповіді 26
Список використаних джерел 30

Вступ

Для фахівців з інформаційних систем та технологій важливо знати основи теорії ймовірностей та математичної статистики, бо інформація може бути статистичною, тому для її обробки та аналізу слід застосовувати методи теорії ймовірностей.

Метою методичних вказівок є залучення студентів до активної роботи на практичних заняттях.

Для цього, відповідно до силабусу з даної дисципліни, на кожне заняття пропонуються завдання різного рівня складності, щоб студенти могли під керівництвом викладача їх виконувати. Деякі задачі є оригінальними, інші взяті з джерел, наведених у списку використаної літератури. До кожної теми сформульовані теоретичні питання, необхідні для виконання цих робіт.

Всього методичні вказівки містять 106 завдань із відповідями до них. Замість статистичних таблиць наводяться короткі інструкції з користування електронними таблицями.

§ 1. Елементи комбінаторики

Мета роботи: Оволодіти основами комбінаторики для розв’язання різноманітних практичних задач.

Перелік теоретичних питань:

1) правило додавання;

2) правило множення;

3) розміщення з повтореннями та їх кількість;

4) розміщення без повторень та їх кількість;

5) перестановки без повторень та їх кількість;

6) комбінації без повторень та їх кількість;

7) перестановки з повтореннями та їх кількість;

8) комбінації з повтореннями та їх кількість;

9) формула включення-виключення.

Задачі на арифметичні дії

1. [3] Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, усі цифри яких однакові?

2. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, послідовні цифри яких утворюють геометричну прогресію?

3. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, послідовні цифри яких утворюють арифметичну прогресію?

4. Скільки існує 7-цифрових чисел, що не діляться на 3?

5. Скільки існує 5-цифрових чисел, що діляться на 11?

6. Скільки існує 3-цифрових чисел, що діляться на 19?

7. Є 6 різних ключів від 6 шухляд. Нехай за 10 секунд можна перевірити, чи ключ підходить до шухляди. За який час можна гарантовано підібрати ключі до всіх шухляд?

8. [1, 3] Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, в яких сума двох перших цифр дорівнює сумі двох останніх цифр?

9. [4] В колективі програмістів 18 осіб знають C++, 25 знають Python, 29 знають Java, 7 знають C++ і Python, 5 знають C++ і Java, 11 знають Python і Java, 2 знають всі три мови програмування. Скільки програмістів знають а)хоча б одну з цих трьох мов? б)знають тільки одну з цих трьох мов?

Задачі на множення та розміщення

10. [4] Будівля має 4 входи. Скількома способами можна зайти і вийти з неї?

11. [4] Будівля має 6 входів. Скількома способами можна зайти і вийти з неї, не проходячи двічі через ті ж вхідні двері?

12. Скількома способами можна розподілити 5 різних картин по 3-х кабінетах?

13. Торговий агент намагається продати 5 різних картин, послідовно заходячи до трьох установ. Скільки є варіантів покупок картин установами?

14. Скількома способами можна з 8-ми кімнат вибрати кабінети директора, його заступника та бухгалтера?

15. [4] В аудиторії є 10 комп’ютерів. Скількома способами 6 студентів можуть сісти за ними?

16. У театральній групі є 8 акторів та 10 актрис. Потрібно вибрати з них для різних ролей у виставі 5 акторів та 4 актриси. Скількома способами це можна зробити?

17. Скількома способами можна роздати 4-м дітям 4 різні подарунки так, щоб кожна дитина отримала подарунок?

18. [3] Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, які не містять нулів?

19. [3, 4] Скільки існує 5-цифрових чисел, усі цифри яких різні?

20. Скільки існує 5-цифрових чисел, які містять як парні, так і непарні цифри?

21. [4] Скільки існує 5-цифрових чисел, які не містять одиниць?

22. [1] Скільки перестановок можна утворити з букв слова “місто”?

23. Скількома способами можна набрати у сумі за 2 модулі по 20 балів і до 60 балів за практичні заняття а) рівно 60 балів? б) не менше 60 балів? в) менше 60 балів?

Задачі на перестановки з повтореннями та комбінації

24. [4] Скількома способами можна вибрати 4-х делегатів конференції з колективу з 10 осіб?

25. Скільки існує 4-цифрових PIN-кодів, в яких кожна наступна цифра більша від попередньої?

26. [4] Скількома способами можна розділити на дві команди по 5 гравців 3-х студентів та 7-х студенток так, щоб у жодній команді не були лише студентки?

27. [4] У балетній групі є 8 танцюристів та 11 балерин. Потрібно вибрати з них для виступу 3 пари. Скількома способами це можна зробити?

28. [1, 4] Скільки перестановок можна утворити з букв слова “тетраедр”?

29. У 8 магазинах є 5 однакових ноутбуків певної моделі. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

30. Відомо, що у кожному з 8 магазинів є принаймні 1 ноутбук певної моделі, а загальна кількість ноутбуків у цих магазинах 18. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

31. У 8 магазинах є не більше 5 однакових ноутбуків певної моделі. Скільки є всього можливих розміщень цих ноутбуків по магазинах?

32. Скількома способами можна набрати у сумі за 2 модулі по 20 балів і до 60 балів за практичні заняття а) 74 бали? б) 90 балів? в) не менше 90 балів?

33. Скількома способами можна написати в рядку 10 нулів та 5 одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поряд?

34. Скількома способами можна посадити в ряду 5 студенток та 10 студентів так, щоб жодні дві студентки не сиділи поряд?

35. Скількома способами можна посадити за круглим столом 5 студенток та 10 студентів так, щоб жодні дві студентки не сиділи поряд?

36. Скількома способами можна написати по колу на дзизі 10 нулів та 5 одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поряд?

§ 2. Випадкові події та їх імовірності.

Мета роботи: Навчитися обчислювати ймовірності складних подій.

Перелік теоретичних питань:

1) ймовірність протилежної події та суми подій;

2) класичне означення ймовірності;

3) геометричні імовірності;

4) умовні ймовірності;

5 ймовірність добутку подій;

6) незалежні випадкові події;

7) формули повної ймовірності та Байєса;

8) формула Бернуллі та її наближення.

Додавання, віднімання та множення ймовірностей

37. Події A та B — несумісні, P(A)=0,3, P(B)=0,4.

Знайти $P(A \cup B)$.

38. P(A)=0,3, P(B)=0,4, $P(AB) = 0,2$.

Знайти $P(A \cup B)$.

39. Події A та B — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4.

Знайти $P(A \cup B)$.

40. Події A та B — несумісні, P(A)=0,3, P(B)=0,4.

Знайти $P(A\bar{B})$.

41. P(A)=0,3, P(B)=0,4, $P(AB) = 0,2$.

Знайти $P(A\bar{B})$.

42. Події A та B — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4.

Знайти $P(A\bar{B})$.

43. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти $P(AB\mathrm{C})$.

44. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти $P(A\cup B\mathrm{C})$.

45. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти $P(A\bar{B}\mathrm{C})$.

46. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти $P((A\cup B)\mathrm{C})$.

47. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти ймовірність того, що жодна з цих подій не відбудеться.

48. Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти $P(A\cup B\cup \mathrm{C})$.

49. [1] Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти ймовірність того, що відбудеться тільки одна з цих подій.

50. [1] Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти ймовірність того, що відбудуться тільки дві з цих подій.

51. [1] Події A, B та C — незалежні, P(A)=0,3, P(B)=0,4, P(C)=0,5. Знайти ймовірність того, що відбудуться не менше двох з цих подій.

52. Ймовірність високого врожаю озимої пшениці у певній місцевості дорівнює 0,7, а ячменю 0,75. Ймовірність того, що не вродить ні озима пшениця, ні ячмінь, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що буде високий урожай і озимої пшениці, і ячменю.

53. Можливість отримати замовлення від клієнтів А, В, С — незалежні події. Нехай імовірність отримати замовлення від клієнта А дорівнює 0,4, від клієнта В — 0,7, а від клієнта С — 0,8. Знайти ймовірність того, що буде не більше одного замовлення.

Класичне означення ймовірностей

54. Знайти ймовірність того, що при підкиданні двох кубиків випаде в сумі 8 очок.

55. 22 учасників змагань жеребкуванням ділять на дві команди по 11 учасників. Знайти ймовірність того, що двоє братів опиняться в різних командах.

56. В аудиторії є 12 комп’ютерів, на 5 із них встановлена операційна система Linux. Група з 6 студентів навмання сідають за комп’ютери. Знайти ймовірність того, що не менше 3 із них сядуть за комп’ютери з Linux.

Геометричні ймовірності

57. Поїзди метро приходять на станцію з інтервалом 4 хв. Знайти ймовірність того, що пасажирові доведеться чекати більше 3 хв.

58. Поїзди метро приходять на станцію з інтервалом 4 хв. Знайти ймовірність того, що пасажирові доведеться чекати в сумі а) за дві поїздки більше 5 хв; б) за три поїздки більше 9 хв.

59. Вірьовка довжиною 3 м рветься на дві частини. Знайти ймовірність того, що довжина довшої частини буде не меншою від 2 м.

60. Після заокруглення числа x отримали 2,5. Знайти ймовірність того, що $x>2,52$.

61. Два числа а) спочатку заокруглюють з точністю до сотих, а потім додають; б) спочатку додають, а потім заокруглюють до сотих. Знайти ймовірність того, що вийдуть різні відповіді. Зробити висновок.

62. Три числа а) спочатку заокруглюють з точністю до сотих, а потім додають; б) спочатку додають, а потім заокруглюють до сотих. Знайти ймовірність того, що вийдуть різні відповіді.

63. У прямокутнику $0<x<5$, $0<y<3$ вибирається точка так, що ймовірність потрапити в область всередині прямокутника пропорційна площі цієї області. Знайти ймовірності таких подій: а) $\min\{x, y\}<1$, б) $\max\{x, y\}>2$, в)$\min\{x, y\}>4$, г) $\max\{x, y\}<4$.

Умовні ймовірності. Ймовірність добутку подій

64. $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$, $P(AB) = 0,2$.

Знайти умовні ймовірності а)$P_B(A)$; б)$P_A(B)$.

65. Ймовірність високого врожаю озимої пшениці у певній місцевості дорівнює 0,7, а ячменю 0,75. Ймовірність того, що не вродить ні озима пшениця, ні ячмінь, дорівнює 0,2. Відомо,що озима пшениця вродила добре. Знайти ймовірність того, що буде високий урожай ячменю.

66. Гральний кубик підкидається двічі. Відомо, що при другому киданні випало більше число, ніж при першому. Знайти ймовірність того, що при другому киданні випало 6.

67. Покупець вирішив перевірити 3 з 10 виробів партії. Знайти ймовірність того, що він виявить брак, якщо в партії є 2 браковані вироби. Зробити висновок.

68. Можливість отримати замовлення від клієнтів A, B, C — незалежні події. Нехай ймовірність отримати замовлення від клієнта A дорівнює 0,4, від клієнта B — 0,7, а від клієнта C — 0,8. Відомо, що було не менше двох замовлень. Знайти ймовірність того, що було замовлення від клієнта A.

Формули повної ймовірності та Байєса

69. [4] У складальний цех надходять деталі: 40%-з першого верстату, 35%-з другого верстату, 25%-з третього верстату. Ймовірність виготовлення бракованої деталі 1-им верстатом дорівнює 0,03, 2-м — 0,02, 3-м — 0,04. Скільки відсотків бракованих деталей у складальному цеху?

70. [1, 3] Ймовірність того, що виріб задовольняє стандарт 0,9. Пропонується спрощена система перевірки виробу, яка дає позитивний результат з ймовірністю 0,98 для стандартних виробів та з ймовірністю 0,01 для нестандартних. а) Яка ймовірність того, що виріб, який пройшов перевірку, є нестандартним? б) Яка ймовірність того, що виріб, який не пройшов перевірку є стандартним? Зробити висновки.

Формула Бернуллі та її наближення

71. Нехай P(A)=0,3. Знайти $P_6(2)$.

72. Нехай P(A)=0,2. Знайти ймовірність того, що в 4 випробуваннях подія A відбудеться хоча б один раз.

73. Нехай P(A)=0,4. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія A відбудеться не більше 3-х разів.

74. Нехай P(A)=0,002. Знайти $P_{1000}(3)$.

75. Нехай P(A)=0,6. Знайти $P_{200}(115)$.

76. Нехай P(A)=0,5. Знайти $P_{500}(245{,}260)$.

§ 3. Випадкові величини

Мета роботи: Навчитися обчислювати ймовірності складних подій.

Перелік теоретичних питань:

1) обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини в даний проміжок за функцією розподілу;

2) закон розподілу дискретної випадкової величини, її математичне сподівання, мода, медіана, дисперсія та середнє квадратичне відхилення;

3) властивості щільності розподілу неперервної випадкової величини, її математичне сподівання, мода, медіана, дисперсія та середнє квадратичне відхилення;

4) рівномірний розподіл;

5) біномний розподіл;

6) гіпергеометричний розподіл.

Дискретні випадкові величини

77. При якому значенні числа *p* наступна таблиця задаватиме закон розподілу дискретної випадкової величини X?

X	2	3	5	7

P	0,2	0,4	*p*	0,3

Знайти для цієї випадкової величини моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік її функції розподілу та знайти медіану. Яка ймовірність того, що X набуде значення більше від її моди?

78. За умовою задачі 53 знайти закон розподілу кількості замовлень, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що X набуде значення більше від її медіани?

79. За умовою задачі 56 знайти закон розподілу кількості комп'ютерів з операційною системою Linux, за якими сядуть студенти, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що X набуде значення більше від її математичного сподівання?

Неперервні випадкові величини

80. При якому значенні числа с наступна функція є щільністю розподілу деякої випадкової величини X?

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо} x \le -1; \\ \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}} \text{якщо} -1 < x < 1; \\ 0, \text{якщо} x \ge 1. \end{cases}$$

Знайти для цієї випадкової величини моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік її функції розподілу та знайти медіану. Яка ймовірність того, що X набуде значення більше від її медіани?

81. За умовою задачі 58 знайти функцію та щільність розподілу сумарного часу очікування пасажиром поїздів метро за дві поїздки, його моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що X набуде значення від 3 хв до 6 хв?

82. [3] В квадраті зі стороною 10 см вибирається точка так, що ймовірність потрапити в область всередині прямокутника пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу максимальної відстані від цієї точки до сторони квадрата, її моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Яка ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення від 3 см до 8 см?

§ 4. Розподіли випадкових величин

Мета роботи: Навчитися використовувати розподіли випадкових величин для розв’язування практичних задач.

Перелік теоретичних питань:

1) нормальний розподіл;

2) показниковий розподіл;

3) геометричний розподіл;

4) розподіл Пуассона;

5) найпростіший потік.

Нормальний розподіл

83. [3] Певна група людей має середню масу 72 кг і середнє квадратичне відхилення 7 кг. Знайти ймовірність того, що маса окремо взятої людини з цієї групи а) менша від 80 кг; б) менша від 60 кг в)більша від 90 кг г) знаходиться в межах від 65 кг до 75 кг. Яку величину не перевищить маса людини з даної групи з імовірністю 0,95? Яка ймовірність того, що сумарна маса 4-х людей, які увійшли до ліфта, не перевищить 320 кг?

84. Випадкові похибки експерименту мають нормальний розподіл із середнім квадратичним відхиленням 15. Проведено 16 експериментів та знайдено середнє арифметичне цих вимірів. Яка ймовірність, що його відхилення за абсолютною величиною від математичного сподівання буде а) не більше від 3? б) більшим від 10? Скільки потрібно провести експериментів, щоб з імовірністю 0,95 відхилення їх середнього арифметичного від математичного сподівання було не більшим від 5?

Показниковий розподіл

85. [3] Двоє працівників ремонтують прилади. Час ремонту приладу має показниковий розподіл із параметром λ=2/год. Той працівник, який раніше закінчить ремонт приладу, візьметься за ремонт 3-го приладу. Знайти а) ймовірність того, що він закінчить ремонт 3-го приладу раніше, ніж його напарник свій перший прилад; б) ймовірність того, що протягом години 1-й та 2-й прилади будуть відремонтовані; в) ймовірність того, що 1-й прилад буде ремонтуватися від 20 хв до 40 хв.

Геометричний розподіл

86. Троє гравців по черзі підкидають кубик. Виграє той, у кого першого випаде 6. Одне підкидання кубика триває 10 секунд. Знайти а) ймовірність перемоги 2-го гравця; б) ймовірність того, що гра триватиме довше двох хвилин; в) середню тривалість гри.

Розподіл Пуассона; найпростіший потік

87. [5] Середня кількість замовлень таксі, які надходять на диспетчерський пункт за одну хвилину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини буде а) 4 замовлення; б) менше 4 замовлень; в) не менше 4 замовлень. Знайти середній час між замовленнями та його дисперсію й середнє квадратичне відхилення.

88. [1] Скільки в середньому родзинок має бути в булочках, щоб з імовірністю 0,99 у навмання вибраній булочці було не менше однієї родзинки?

§ 5. Системи випадкових величин

Мета роботи: Зрозуміти теоретично, що таке регресія і кореляція.

Перелік теоретичних питань:

1) двовимірні випадкові величини, їх розподіли;

2) незалежні випадкові величини;

3) математичне сподівання, коваріаційна матриця;

4) коефіцієнт кореляції та його властивості;

5) умовні розподіли та умовні математичні сподівання;

6) кореляційне відношення;

7) лінійна регресія;

8) двовимірний нормальний розподіл та властивості нормально розподілених випадкових величин.

89. При якому значенні числа *p* наступна таблиця задаватиме закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (*X*, *Y*)?

$Y \quad	\quad X$	0	1	2
2	0,3	p	0
3	0	0,2	0,1
5	0	0,1	0,2

Знайти одновимірні закони розподілу випадкових величин *X* та *Y*, їхні математичні сподівання, кореляційну матрицю, коефіцієнт кореляції, рівняння лінійної регресії *Y* на *X* та *X* на *Y*, **D**(*Y*-*X*) та **D**(3*X*+2*Y*), умовне математичне сподівання *Y* за умови, що *X*=1, закон розподілу умовного математичного сподівання *Y* за *X*, кореляційне відношення *Y* на *X*. Охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами.

90. Нехай *X* та *Y* — незалежні випадкові величини, які мають розподіл N(0, 1),$U = 5X + 3Y - 7$; $V = 4X - Y + 2$. Знайти$\eta_{U/V}$та$\eta_{V/U}$. Охарактеризувати зв'язок між *U* та *V*.

§ 6. Елементи математичної статистики

Мета роботи: Навчитися обробляти статистичну інформацію та приймати рішення на її основі.

Перелік теоретичних питань:

1) варіаційний ряд;

2) емпірична функція розподілу;

3) вибіркові числові характеристики;

4) незсунена оцінка дисперсії;

5) надійні інтервали для ймовірності події та параметрів нормального розподілу;

6) параметричні статистичні критерії;

7) перевірка гіпотез про розподіл випадкової величини;

8) перевірка гіпотези про незалежність випадкових величин.

91. Для вибірки 1,2,5,4,3,4,3,4,2,4,3,1,2,4 утворити варіаційний ряд, побудувати графік емпіричної функції розподілу, знайти обсяг, розмах, вибіркові моду, медіану, середнє та середнє квадратичне відхилення. Знайти незсунену оцінку дисперсії та оцінити ймовірність події $X>3$.

Надійні інтервали

92. [6] Серед 250 деталей, виготовлених верстатом-автоматом, виявилося 32 нестандартних. Знайти двобічний надійний інтервал ймовірності p виготовлення нестандартної деталі з надійністю 0,95. Знайти верхню оцінку p з такою ж надійністю. З якою надійністю можна стверджувати, що $p<0,15$?

93. Побудувати інтервали надійності 0,95 для математичного сподівання та дисперсії за вибіркою з нормального розподілу 8, 11, 11, 10. З якою надійністю можна стверджувати, що математичне сподівання більше від 7?

Параметричні статистичні критерії

94. [1] При перевірці 10 електролічильників вимірювалося значення величини X, яка для стандартного лічильника має дорівнювати 1. Перевірити гіпотезу про відсутність систематичної похибки на рівні значущості 0,05. Результати вимірювання наступні:

№	1	2	3	4	5
x_i	0,983	1,002	0,998	0,996	1,002
№	6	7	8	9	10
x_i	0,983	0,994	0,991	1,005	0,986

95. [5] Маса пакунка з природним барвником має становити 50 кг, а дисперсія не повинна перевищувати 0.01 кг^2. При обстеженні 10 пакунків отримали такі маси (в кг).

50,1	50,07	49,93	49,81	49,7
49,76	50,08	50,18	49,79	50,02

Чи зазначені вимоги виконуються на рівні значущості 0,05?

96. [1] Із 6 партій сировини виготовлено бетон двома способами: одним способом із 3 партій та удосконаленим способом із трьох інших партій. За результатами вимірювання спротиву стиску перевірити, чи при другому способі якість бетону краща на рівні значущості 0,01.

1-й спосіб	290	311	284
2-й спосіб	309	318	318

97. [1] 10 різних ділянок землі поділили навпіл та засіяли сіялками різних типів. Перевірити гіпотезу про відсутність залежності урожаю від типу сіялки на рівні значущості 0,05 за наступними даними:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	8,4	8	6,4	8,6	7,7	7,7	5,6	5,6	6,2
5,6	7,4	7,3	6,4	7,5	6,1	6,6	6,0	5,5	5,5

98. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій на рівні значущості 0,05 у двох вибірках за такими даними:

$$S_X^2 = 385{,}52; n_X = 64; S_Y^2 = 636{,}24; n_Y = 17.$$

Перевірка гіпотез про розподіл випадкової величини

99. Задано дискретний варіаційний ряд.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	15	12	9	6	4	2	1	1

Перевірити гіпотези на рівні значущості 0,05

а) про розподіл Пуассона;

б) про геометричний розподіл;

в) про біномний розподіл.

100. [1] Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл вимірів Міллікеном заряду електрона на рівні значущості 0,01 за даним інтервальним рядом обсягу 58.

4,74	4,747	4,749	4,758	4,761	4,764	4,764	4,764	4,765	4,767
4,768	4,769	4,769	4,771	4,771	4,772	4,772	4,772	4,774	4,775
4,775	4,776	4,777	4,777	4,778	4,779	4,779	4,779	4,781	4,781
4,782	4,783	4,783	4,785	4,785	4,785	4,788	4,788	4,789	4,789
4,790	4,790	4,790	4,791	4,791	4,791	4,792	4,792	4,795	4,797
4,799	4,799	4,801	4,805	4,806	4,808	4,809	4,810		

101. [1] Чи можна за даними в таблиці зробити висновок про залежність між однобічним розвитком рук та очей (на рівні значущості 0,05)?

	лівоокі	однаковоокі	правоокі
лівші	34	62	28
однаковорукі	27	28	20
правші	57	105	52

§ 7. Виявлення залежностей між досліджуваними ознаками та оцінка тісноти їх зв'язку

Мета роботи: Навчитися виявляти залежності між випадковими величинами та оцінювати тісноту їх зв'язку.

Перелік теоретичних питань:

1) вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона;

2) вибіркове рівняння прямої лінії регресії;

3) дисперсійний аналіз.

Кореляція та лінійна регресія

102. Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона випадкових величин X і Y та знайти вибіркове рівняння лінійної регресії Y_X. Зобразити графічно елементи вибірки та пряму Y_X. Перевірити гіпотезу про наявність зв'язку на рівні значущості 0,05. Охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами. Побудувати інтервал надійності 0,95 для коефіцієнта кореляції. Зробити висновок.

x_i	1	2	3	2	1
y_i	3	4	6	3	2

103. [1] Темміс досліджував зв’язок між діаметром пилинок фуксії та кількістю отворів у них для виходу пилкових трубок.

Діаметр в мк (Y)	Кількість отворів (X)				
	0	1	2	3	4
10	3				
15	7	3			
20		6			
25		1			
30			4		
35			5		
40			1	3	
45				4	
50				3	3
55					4
60					3

Обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції Пірсона випадкових величин X і Y та знайти вибіркове рівняння лінійної регресії Y_X. Зобразити графічно елементи вибірки та пряму Y_X. Побудувати інтервал надійності 0,99 для коефіцієнта кореляції. Оцінити кореляційне відношення Y на X. Перевірити гіпотезу про наявність зв’язку на рівні значущості 0,01. Охарактеризувати зв’язок між випадковими величинами.

Дисперсійний аналіз

104. В однофакторному дисперсійному аналізі при 4-х рівнях фактора X є вибірки залежної змінної обсягів 8, 9, 4 та 5 відповідно. Скільки ступенів вільності має а)міжгрупова сума квадратів SS_{fac}? б)повна сума квадратів SS? в)залишкова сума квадратів SS_{in}?

105. [2] Заповнити таблицю однофакторного дисперсійного аналізу у випадку незв'язаних груп однакового обсягу.

	df	SS	MS	F
Між групами	5	16		
Всередині груп				
Всього	23	70		

106. Перевірити гіпотезу про рівність середніх значень результативної випадкової величини на рівнях А, В, С фактора у зв'язаних вибірках на рівні значущості 0,05.

Методи	X	Y	Z	U	V
А	38	30	62	41	27
Б	9	32	5	3	9
В	55	58	61	53	17

Додаток А. Використання функцій електронної таблиці

1. Для обчислення значень **функції та щільності стандартного нормального розподілу** використовується функція NORM.S.DIST з 2-ма аргументами. 1-й аргумент — це аргумент функції, 2-й аргумент — число 1, якщо ми шукаємо значення функції розподілу та число 0, якщо ми шукаємо значення щільності розподілу. Для знаходження щільності стандартного нормального розподілу краще скористатися функцією PHI з 1-м аргументом. Функція GAUSS з 1-м аргументом обчислює значення функції Лапласа.

2. Для знаходження квантилів стандартного нормального розподілу використовується функція NORM.S.INV з 1-м аргументом.

3. Для обчислення експоненти є функція EXP з одним аргументом.

5. Квантилі хі-квадрат розподілу Хельмерта_Пірсона обчислює функція CHISQ.INV. Функцію хі-квадрат-розподілу обчислює CHISQ.DIST.

6. Квантилі t-розподілу Стьюдента обчислює функція T.INV. Зауважте, що TINV діє інакше! Функцію T-розподілу обчислює T.DIST.

7. Квантилі F-розподілу Беренса-Фішера-Снєдокора обчислює функція F.INV з 3-ма аргументами: аргумент функції, кількість ступенів вільності чисельника, кількість ступенів вільності знаменника. Функцію F-розподілу обчислює F.DIST,

8. Z-перетворення Фішера знаходиться за допомогою функції FISHER з одним аргументом, а обернене перетворення — за допомогою функції FISHERINV.

9. Для уточнення меж надійних інтервалів для ймовірності події можна використовувати функції BINOM.DIST, BINOM.INV та CRITBINOM. Зокрема для знаходження нижньої межі двобічного надійного інтервалу в BINOM.DIST вводимо такі аргументи: k-1, n, нижню межу надійного інтервалу, 1. В результаті має вийти число, не менше від $\frac{1+\gamma}{2}$. Інакше нижню межу потрібно буде зменшити. Для уточнення верхньої межі в BINOM.DIST вводимо такі аргументи: k, n, верхню межу надійного інтервалу, 1. В результаті має вийти число, не більше від $\frac{1-\gamma}{2}$. Інакше верхню межу потрібно збільшити.

Додаток Б. Відповіді

1. 10. **2.** 21. **3.** 34. **4.** 6 000 000. **5.** 8181. **6.** 47. **7.** 21. **8.** 670. **9.** а)51; б)32. **10.** 16. **11.** 30. **12.** 243. **13.** 1 024. **14.** 336. **15.** 151 200. **16.** 33 868 800. **17.** 24. **18.** 6561. **19.** 27 216. **20.** 88 875. **21.** 52 488. **22.** 120. **23.** а)441; б)9 261 в)8 820. **24.** 210. **25.** 210. **26.** 105. **27.** 55 440. **28.** 5 040. **29.** 792. **30.** 19 488. **31.** 1287. **32.** а) 336; б) 66; в) 286. **33.** 462. **34.** 201 180 672 000. **35.** 10 973 491 200. **36.** 26. **37.** 0,7. **38.** 0,5. **39.** 0,58. **40.** 0,3. **41.** 0,1. **42.** 0,18. **43.** 0,06. **44.** 0,44. **45.** 0,09. **46.** 0,29. **47.** 0,21. **48.** 0,79. **49.** 0,44. **50.** 0,29. **51.** 0,35. **52.** 0,65. **53.** 0,288. **54.** 5/36. **55.** 10/21. **56.** 0,5. **57.** 1/4. **58**. а)9/32; б)9/128. **59.** 2/3. **60.** 0,3. **61.** 1/4. **62.** 1/3. **63.** а)7/15; б)11/15; в)0; г)4/5. **64.** а)0,5; б)2/3. **65.** 13/14. **66.** 1/3. **67.** 8/15. **68.** 47/89. **69.** 0,029. **70.** а)1/883; б)2/13. **71.** 0,324 135. **72.** 0,5904. **73.** 0,91296. **74.** ≈0,18. **75.** ≈0,044. **76.** ≈ 0,51.

77. p=0,1; Mo=3; MX=4,2; DX=3,96; σ(X)≈1,99; Me=3; P(X>3)=0,4.

78. P(X=0)=0,036; P(X=1)=0,252; P(X=2)=0,488; P(X=3)=0,224; Mo=2; Me=2; MX=1,9; DX=0,61; σ(X)≈0,781; P(X>2)=0,224.

79. P(X=0)=1/132; P(X=1)=5/44; P(X=2)=25/66; P(X=3)=25/66; P(X=4)=5/44; P(X=5)=1/132; моди немає; Me=2,5; MX=2,5; DX=35/44; σ(X)≈0,892; P(X>2,5)=0,5.

80. с=1/π; моди немає; MX=0; DX=0,5; $\sigma(X)=\sqrt{2}/2$; Me=0; P(X>0)=0,5.

81. $F(t)=0$при$t\le 0$, $F(t)=t^2/32$при$0<t\le 4$хв, $F(t)=1-(8-t)^2/32$при4хв $<t\le 8$хв,

$F(t)=1$при $t>8$хв;

$f(t)=0$при$t<0$ та при$t>8$хв, $f(t)=t/16$при$0\le t<4$хв,$f(t)=(8-t)/16$при4хв $\le t\le 8$хв;

Mo=4 хв; Me=4 хв; MX=4 хв; DX= 8/3 хв^2; σ(X)≈1,633 хв.; P(3 хв < X <6 хв)=19/32.

82. $F(t)=0$ при $t\le 5$см, $F(t)=(t-5)^2/25$ при 5см $<t\le 10$см, $F(t)=1$ при $t>10$см;

$f(t)=0$ при $t<5$см та при $t>10$см, $f(t)=2\,(t-5)/25$ при 5см $\le t\le 10$см;

Mo=10 см; $Me=5+5/\sqrt{2}$см; MX=25/3 см; DX= 25/18 см^2; $\sigma(X)=5\sqrt{2}/6$ см; P(3 см <X<8 см)=9/25.

83. а)≈0,8735; б)≈0,0432; в)≈0,0051; г)≈0,5072; ≈83,5 кг; ≈0,9889.

84. а)≈0,5763; б)≈0,0077;$n\ge 35$.

85. а)1/2; б)≈0,7476; в)≈0,2498.

86. а)5/11; б)≈0,1122; в)1хв.

87. а)≈0,1339; б)≈0,1512; в)≈0,8488; MT=20с.; DT=400с^2; σ(T)=20с.

88. ≈4,605.

89. p=0,1; P(X=0)=0,3; P(X=1)=0,4; P(X=2)=0,3; P(Y=2)=0,4; P(Y=3)=0,3; P(Y=5)=0,3; MX=1; MY=3,2; DX=0,6; DY=1,56; cov(X,Y)=0,7; ρ(X,Y)≈0,7235; Y_X=3,2+7(X-1)/6; D(Y-X)=0,76; D(3X+2Y)=20,04; M(Y/X=1)=3,25; P(M(Y/X)=3,25)=0,4; P(M(Y/X)=2)=0,3; P(M(Y/X)=13/3)=0,3; $\eta_{Y/X}$≈0,7243; зв'язок кореляційний, сильний, прямий, регресія близька до лінійної.

90. $\eta_{U/V}$=$\eta_{V/U}$=$\eta_{U/V} = \eta_{V/U} = \sqrt{2}/2$; зв'язок кореляційний, сильний, прямий, регресія лінійна.

91. 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5; n=14; R=4; $\hat{x} = 4; \tilde{x} = 3; \bar{x} = 3$; S=1,195; $S_в^2$=20/13; ν_{14}(X>3)=3/7.

92. (0,09; 0,18); P(p<0,169)≈0,95; P(p<0,15)≈0,81.

93. (7,75; 12,25); (0,64; 28); 0,988.

94. Середнє значення не відхиляється суттєво від норми, оскільки 1,77<2,23, але дисперсія завелика, бо 29>18.

95. Є систематична похибка в напрямку зменшення, оскільки 2,36>2,26.

96. Не можна стверджувати, що при другому способі виготовлення якість бетону краща, бо 2,29<3,75.

97. Урожай вищий при застосуванні сіялки 1-го типу, оскільки 3,21>2,26.

98. Не можна сказати, що дисперсії різні, оскільки 1,65<2,02.

99. Пуассона: 8,7>7,8 — відкидається; геометричний: 6<7,8 — приймається; біномний: 15>7,8 — відкидається.

100. 1,48<9,21 — приймається.

101. 4<9,5 — не можна.

102. r≈0,91; y_x≈1,64x+0,64; 3,71>3,18 — зв'язок кореляційний, значущий, прямий; (0,12; 0,99) — вибірка замала, щоб оцінити силу зв'язку.

103. r≈0,97; y_x≈10,9X+11,4; (0,941; 0,986); $\hat{\eta}_{Y/X} \approx 0{,}978$;28,4>2,68 — зв'язок кореляційний, значущий, дуже сильний, прямий, близький до лінійного.

104. а)3; б)25; в)22.

105. Всередині груп: 20 і 54; MS: 3,2; 2,7; 2,8; F≈1,18.

106. 10,22>4,46: результативна ознака залежить від рівня фактора.

Список використаних джерел

1. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. М. : МГУ, 1963. 156 с.

2. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. М. : Прогресс. 1976. 496 с.

3. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 224 с.: ил.

4. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей: підручник. К. : Вища школа, 1994. 192 с.: іл.

5. Турчин В. М. Математична статистика : посібник. К. : «Академія», 1999. 240 с.

6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. : Высшая школа. 2004. 404 с. : ил.